

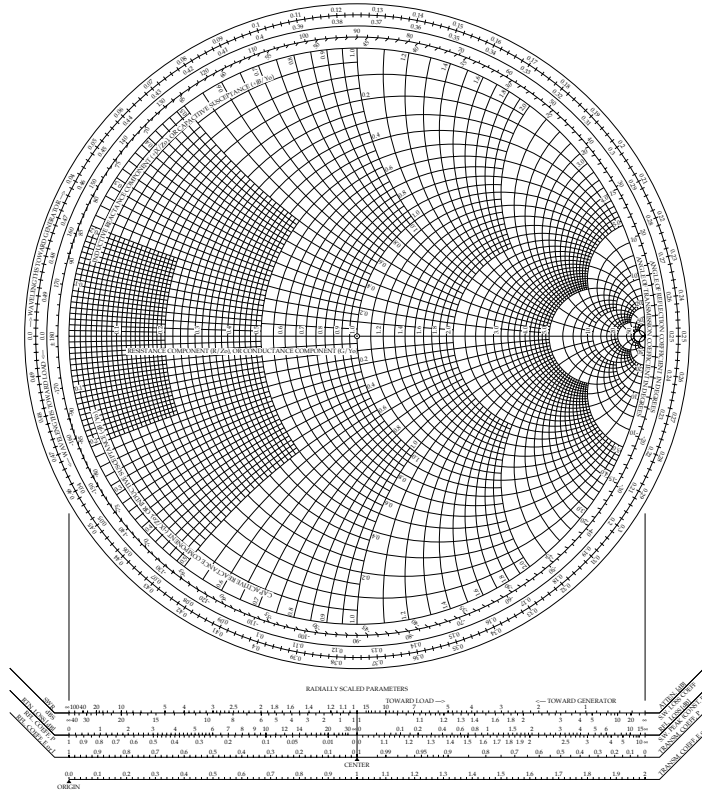
Utilisation de l'abaque de Smith

EE-200 Electromagnétisme – lignes et ondes

Prof. R. Fleury, Laboratory of Wave Engineering, EPFL

romain.fleury@epfl.ch

Qu'est ce que l'abaque de Smith ?



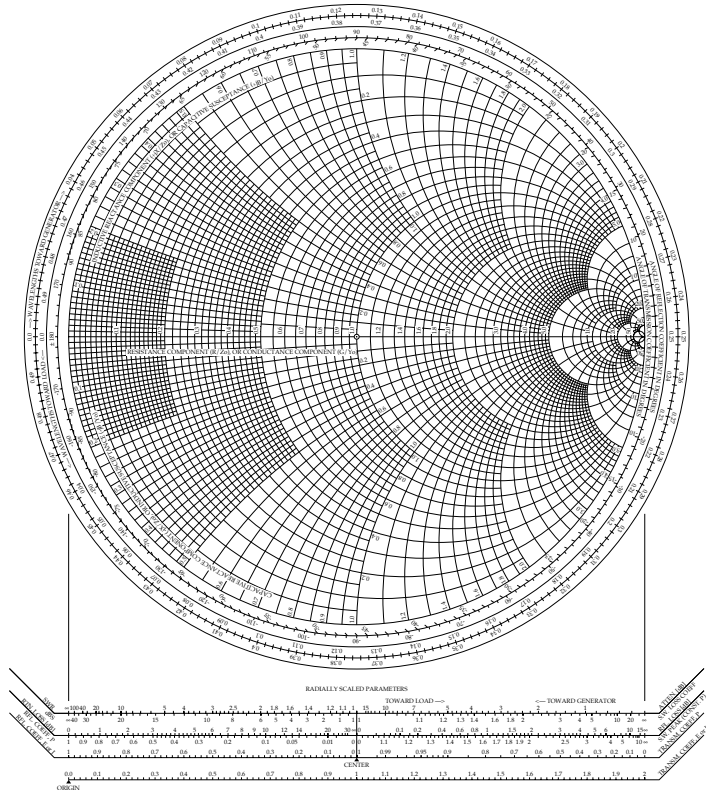
Abaque de Smith = graphique représentant l'impédance de ligne normalisée $\tilde{Z}(z)$ en fonction du coefficient de réflexion de ligne $\Gamma(z)$

Tous les contours circulaires sur l'abaque correspondent à $\tilde{Z}(z)$, il n'y a pas de contour ou de lignes pour repérer $\Gamma(z)$.

Il faut bien noter que l'impédance $\tilde{Z}(z)$ représentée sur l'abaque est normalisée par la valeur de l'impédance caractéristique de la ligne et n'a pas d'unité:

$$\tilde{Z}(z) = \frac{Z(z)}{Z_0}$$

Le lien entre Z et Γ



Dans toute ligne de transmission:

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1}{Z_0} \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{1}{Z_0} \frac{V^+ e^{-j\beta z} [1 + \Gamma(z)]}{\frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} [1 - \Gamma(z)]}$$

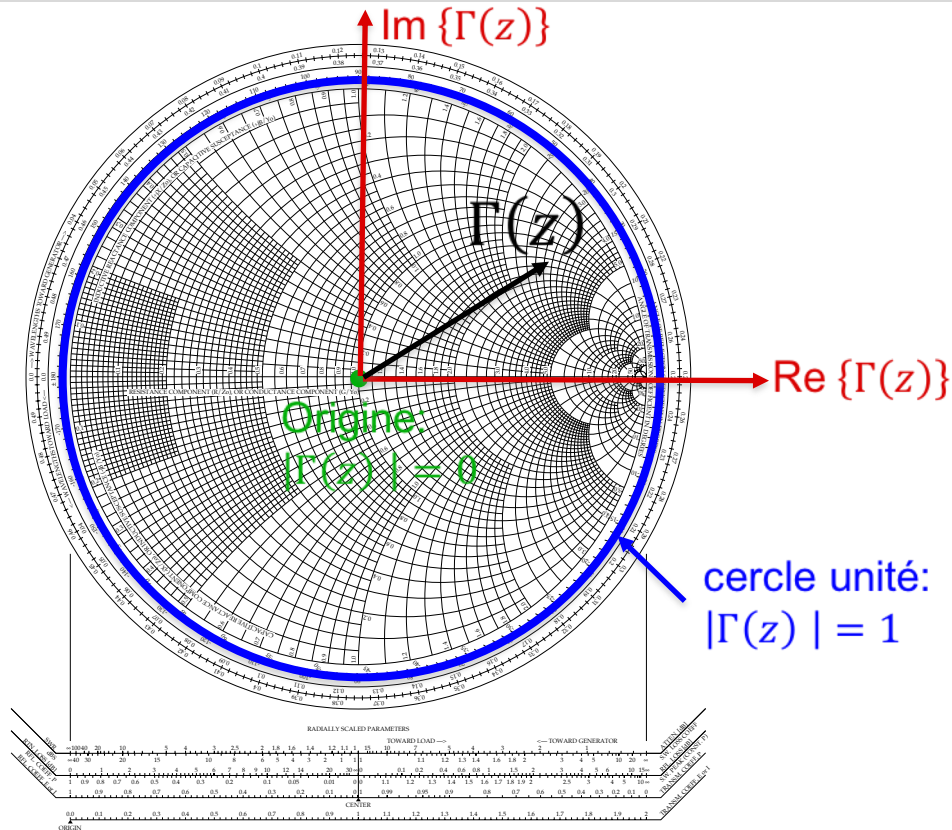
avec $\Gamma(z) = \Gamma_L e^{j2\beta z}$, $|\Gamma(z)| = |\Gamma_L| \leq 1$

$$\Rightarrow \tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

correspondance directe entre $\tilde{Z}(z)$ et $\Gamma(z)$

Pour quoi l'abaque est il rond ?

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$



Parce que $|\Gamma(z)| \leq 1$ et que l'abaque représente toutes les valeurs possibles de $\Gamma(z)$ dans le disque unité du plan complexe

Pour tout $\Gamma(z)$ dans le disque unité,
les contours de l'abaque nous
donne $\tilde{Z}(z)$

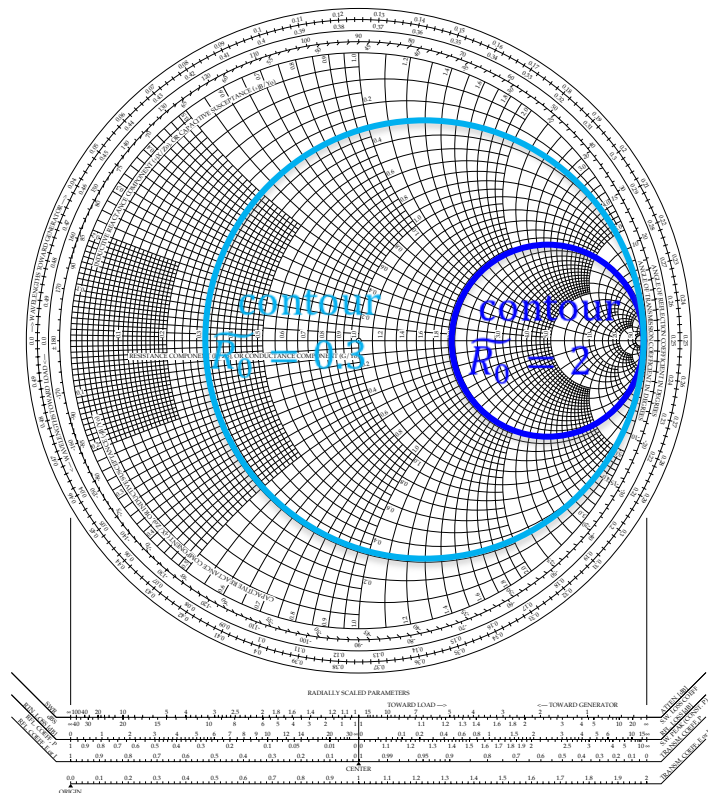
Comment l'abaque est-il construit ?

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

D'abord on a séparé $\tilde{Z}(z)$ en partie réelle et imaginaire:

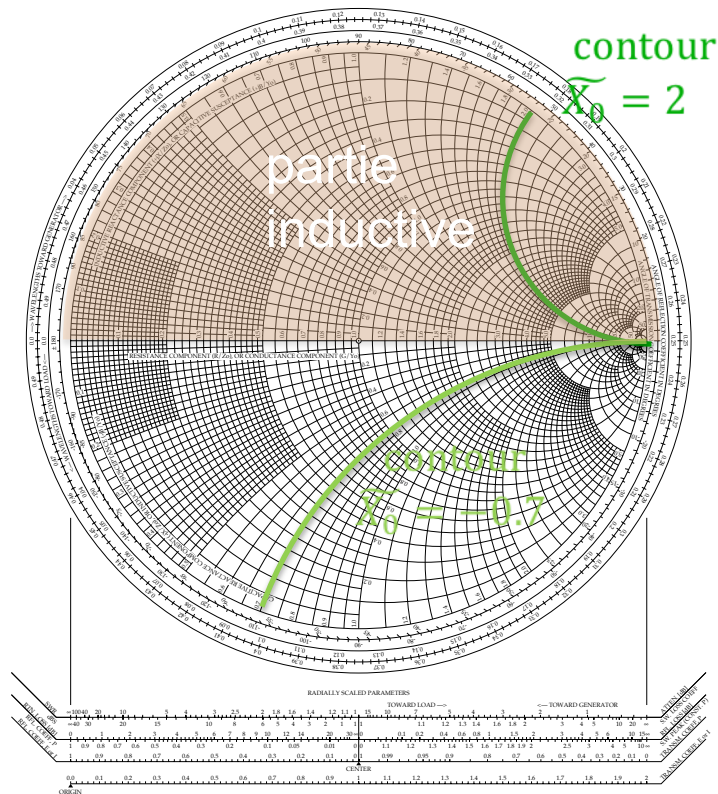
$$\tilde{Z}(z) = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$

Puis, on a représenté dans le plan les contours ayant $\tilde{R}(z) = \tilde{R}_0$ constants pour plusieurs valeurs fixes de $\tilde{R}_0$. Ces contours correspondent à tous les coefficients de réflexions $\Gamma(z)$ associés à $\tilde{Z}(z) = \tilde{R}_0 + j\tilde{X}(z)$



Comment l'abaque est-il construit ?

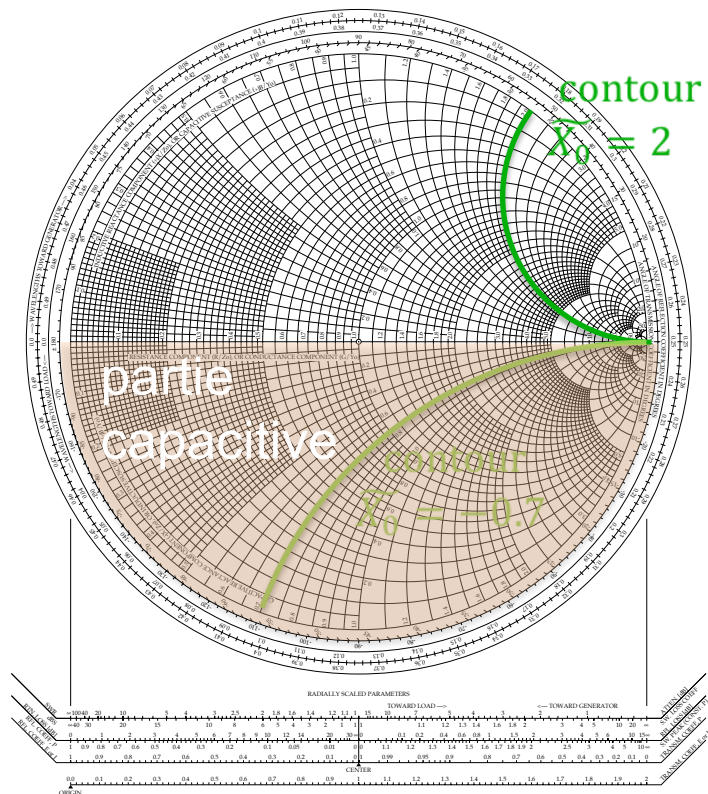
$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$



On a aussi représenté dans le plan les contours ayant $\tilde{X}(z) = \bar{X}_0$ constants pour plusieurs valeurs fixes de $\bar{X}_0$. Ces contours correspondent à tous les coefficients de réflexions $\Gamma(z)$ associés à $\tilde{Z}(z) = \tilde{R}(z) + j\bar{X}_0$

Comment l'abaque est-il construit ?

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$

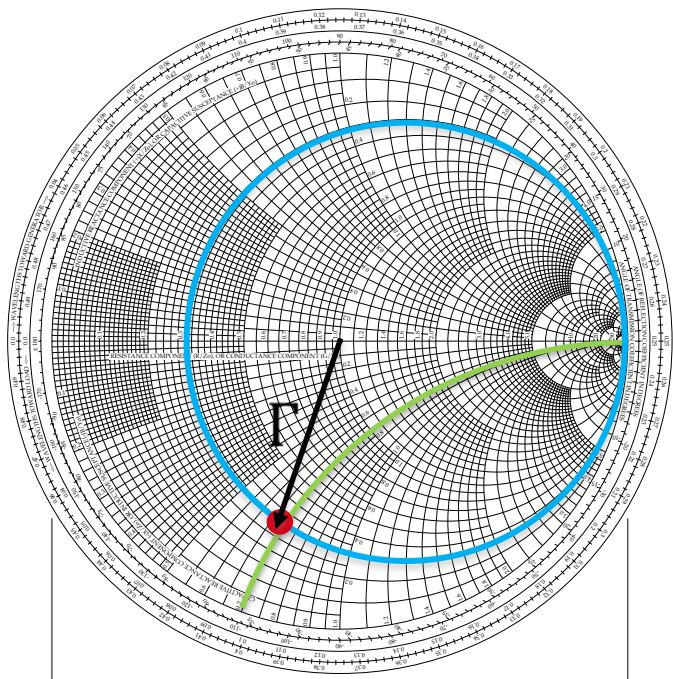


On a aussi représenté dans le plan les contours ayant $\tilde{X}(z) = \tilde{X}_0$ constants pour plusieurs valeurs fixes de $\tilde{X}_0$. Ces contours correspondent à tous les coefficients de réflexions $\Gamma(z)$ associés à $\tilde{Z}(z) = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}_0$

Intersection de deux contours

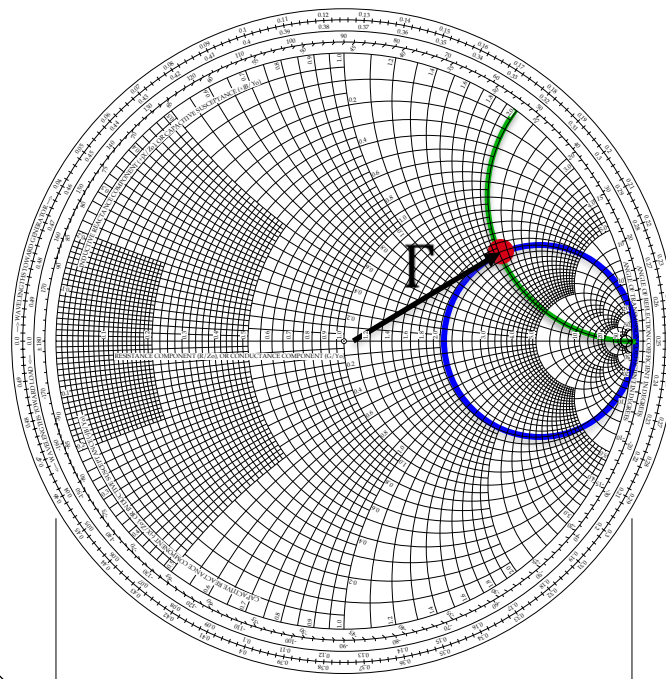
$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$

contours $\tilde{R}_0 = 0.3$ et $\tilde{X}_0 = -0.7$



● intersection : $\tilde{Z} = 0.3 - j0.7$,
charge capacitive

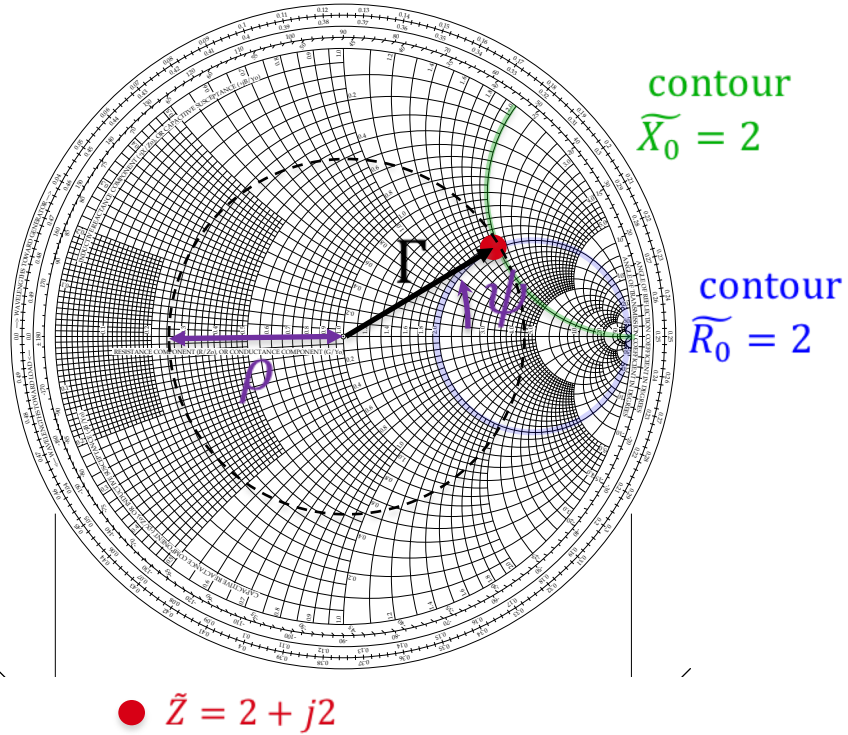
contours $\tilde{R}_0 = 2$ et $\tilde{X}_0 = 2$



● intersection : $\tilde{Z} = 2 + j2$,
charge inductive

Comment lire Γ ?

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$



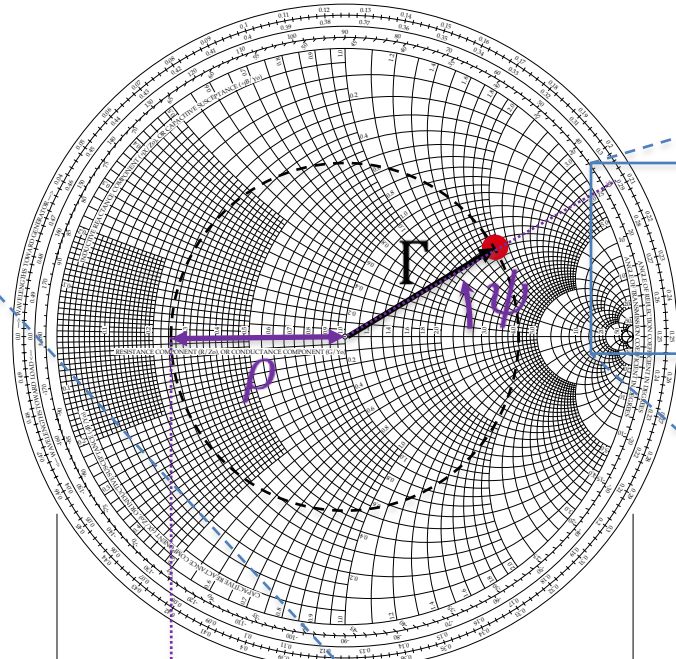
$$\Gamma = \rho e^{j\psi}$$

Comment lire Γ ?

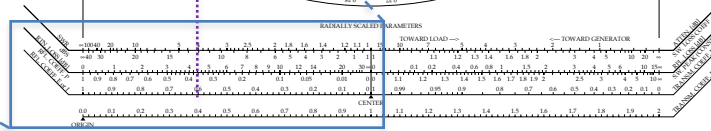
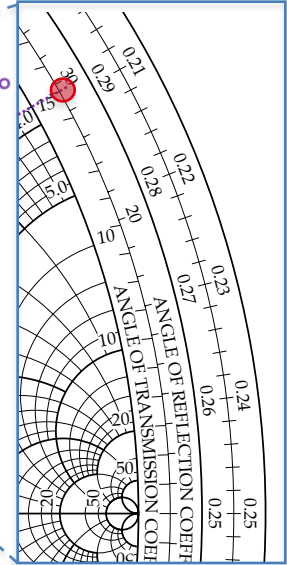
$$\Gamma = \rho e^{j\psi} \quad \tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$

$$SWR = S \approx 4.25$$

$$\rho = 0.62$$



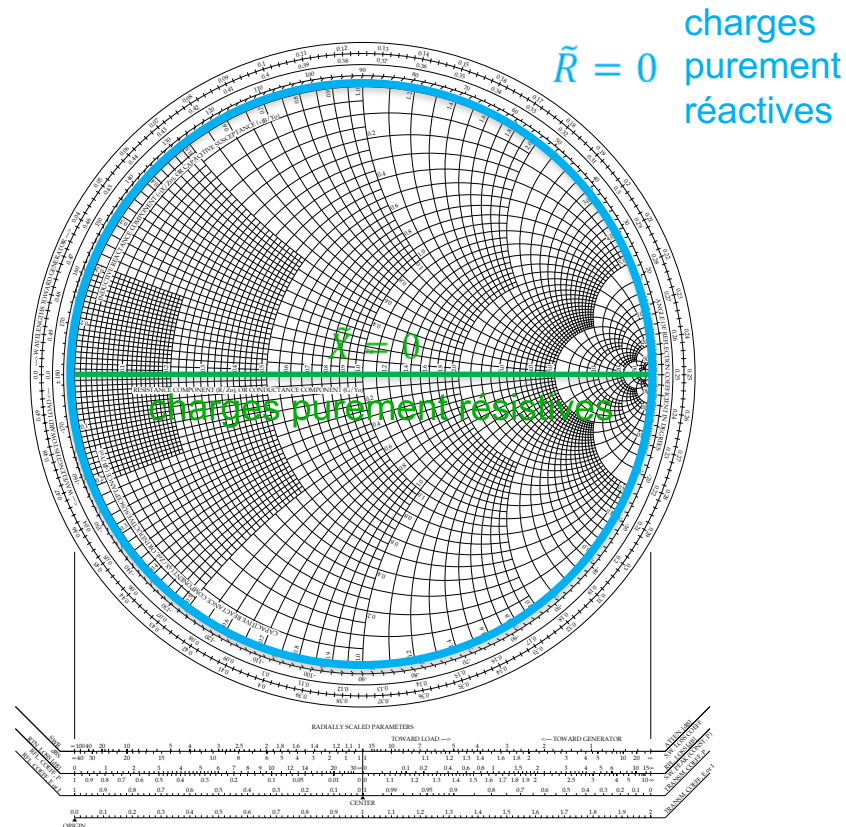
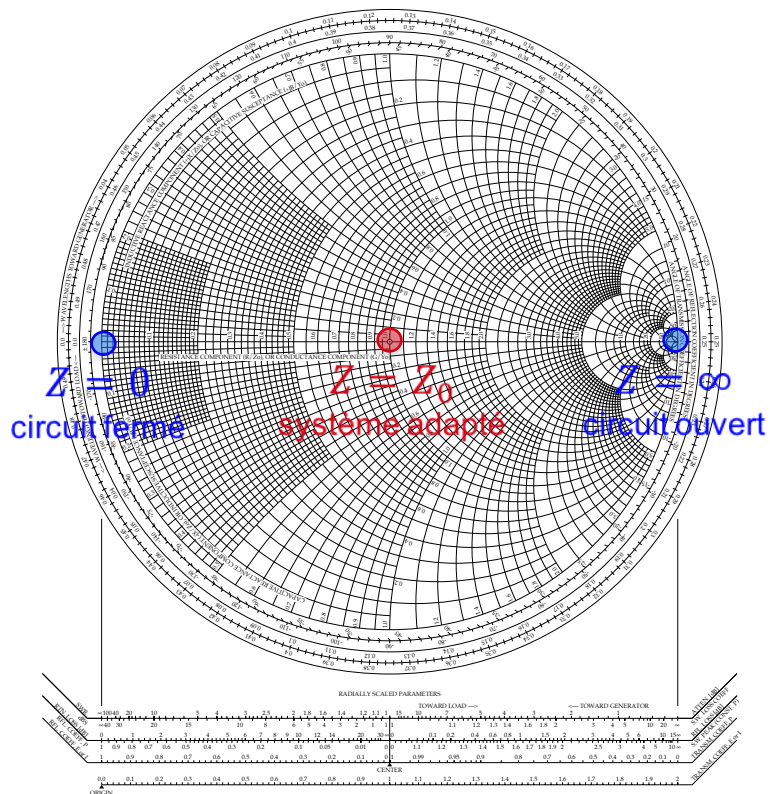
$$\psi \approx 29.5^\circ$$



$$\tilde{Z} = 2 + j2$$

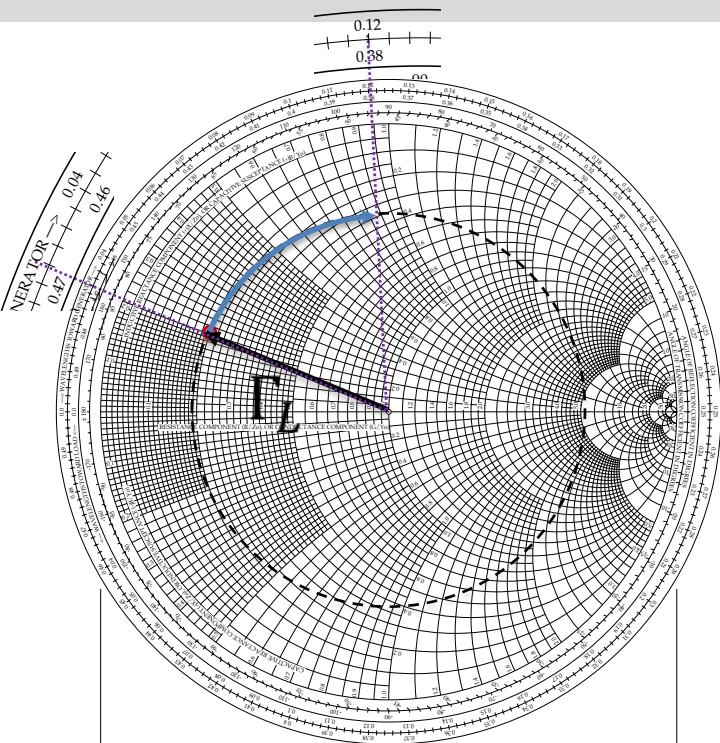
Points et contours remarquables

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$



Faire varier z

$$\tilde{Z}(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = \tilde{R}(z) + j\tilde{X}(z)$$



● $\tilde{Z} = 0.2 + j0.2$

Prenons un exemple. Une ligne d'impédance 50Ω est terminée en $z=0$ par une charge $Z_L = 10 + j10 \Omega$. Il s'agit du point rouge sur l'abaque ci contre.

Cette charge a un coefficient de réflexion Γ_L que l'on peut lire sur l'abaque. On lit $\Gamma_L = 0.67e^{j156^\circ}$.

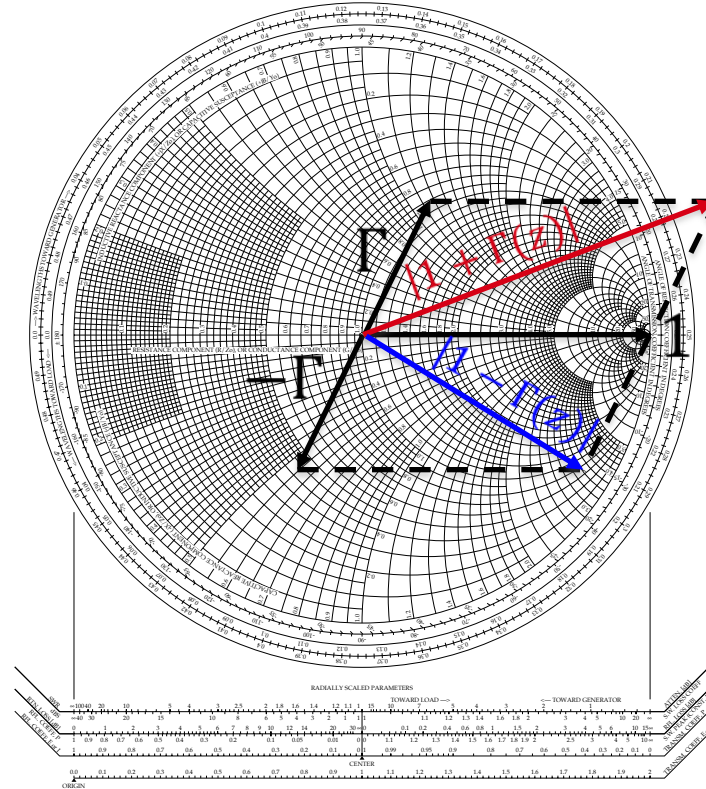
Quand on s'éloigne de la charge, le coefficient devient $\Gamma(z) = \Gamma_L e^{j2\beta z}$: puisque $z < 0$, on suit le cercle de rayon $\rho = 0.67$ dans le sens *horaire*.

La distance parcourue est graduée sur le périmètre externe de l'abaque, en unité de λ : pour l'exemple ci contre, on a $\Delta l = 0.12\lambda - 0.032\lambda = 0.088\lambda$

Tension et courant sur l'abaque

$$V(z) = V^+ e^{j\beta z} (1 + \Gamma)$$

$$I(z) = V^+ / Z_0 e^{j\beta z} (1 - \Gamma)$$



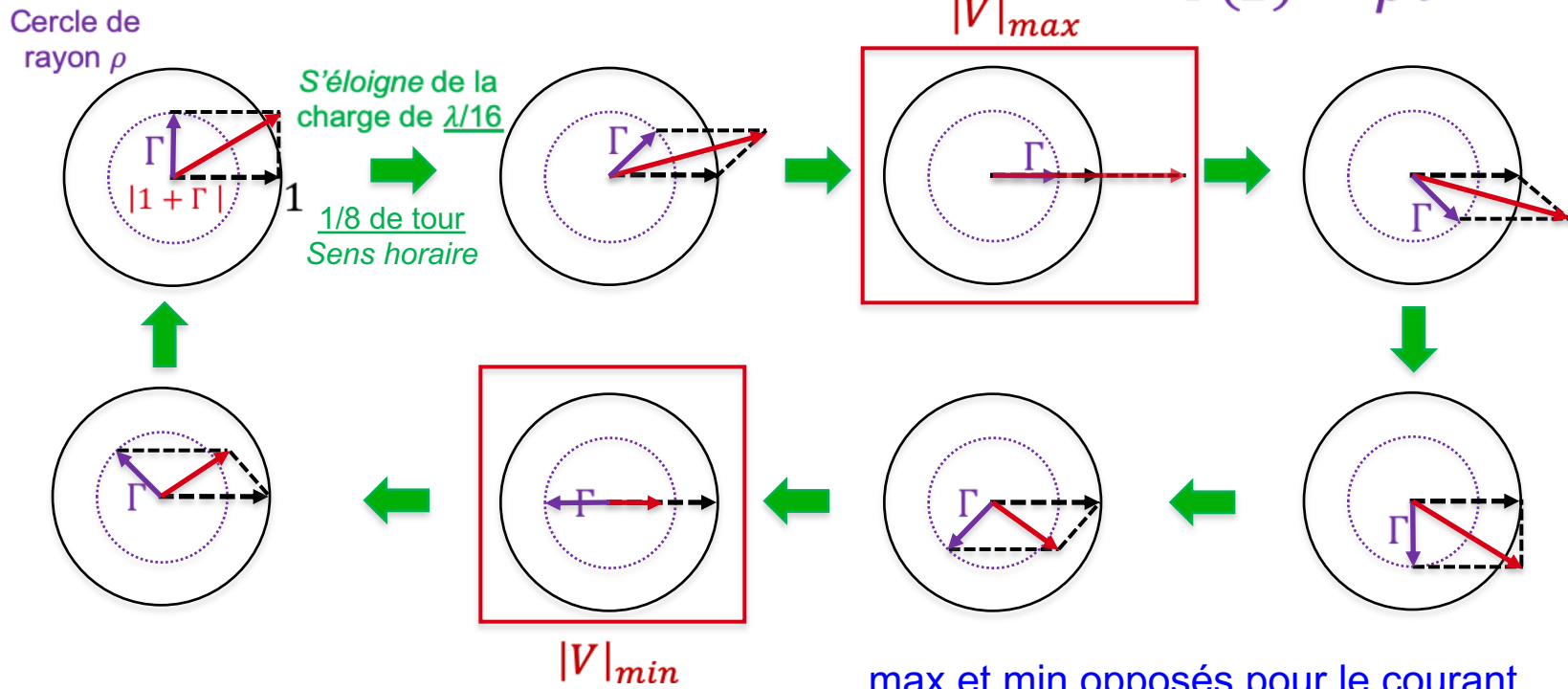
$$|V(z)/V^+| = |1 + \Gamma(z)|$$

$$|I(z)Z_0/V^+| = |1 - \Gamma(z)|$$

Minima et maxima de tension

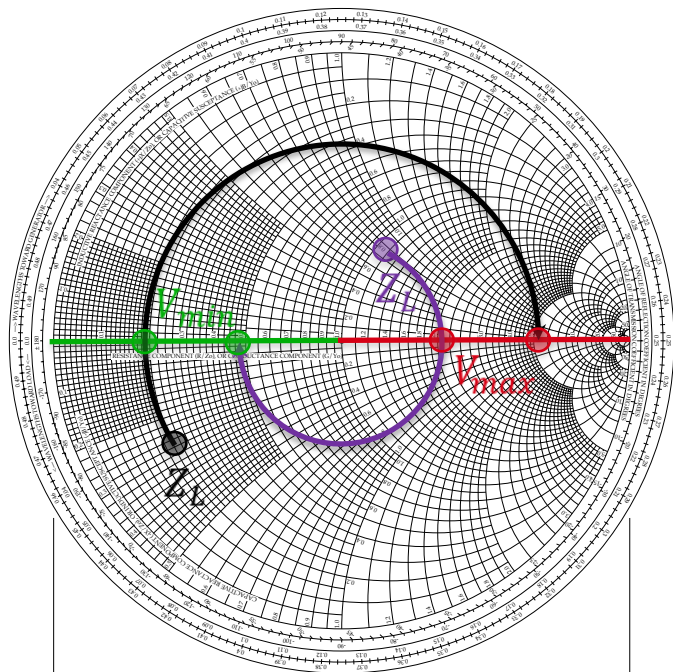
$$|V(z)|/|V^+| = |1 + \Gamma(z)|$$

$$\Gamma(z) = \rho e^{j(\psi + 2\beta z)}$$



Minima et maxima de tension

$$\Gamma(z) = \rho e^{j(\psi+2\beta z)}$$



axe réel négatif: $\psi + 2\beta z = -(2m + 1)\pi$
=minimum de tension

axe réel positif: $\psi + 2\beta z = -m2\pi$
=maximum de tension

charge capacitive: $\tilde{Z}_L \in$ demi cercle inférieur
=rencontre V_{min} avant V_{max}

charge inductive= $\tilde{Z}_L \in$ demi cercle supérieur
=rencontre V_{max} avant V_{min}

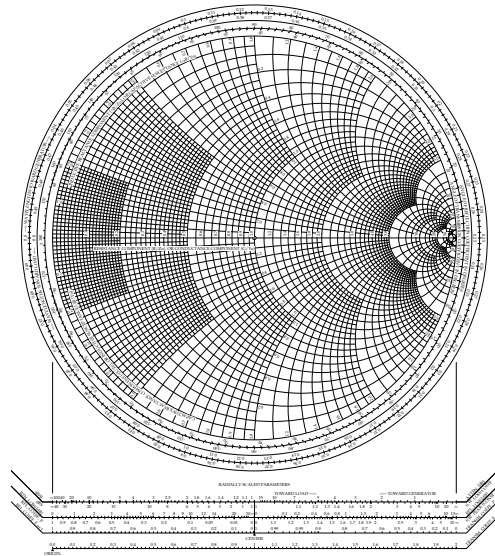
L'abaque de Smith pour l'admittance

$$Y = 1/Z$$

$$Z = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}$$

$$\tilde{Y} = \tilde{G} + j\tilde{B} = \frac{1 - \Gamma(z)}{1 + \Gamma(z)}$$



On utilise le même abaque: les contours R et X sont maintenant les contours G et B. La seule différence est que les charges capacitives correspondent maintenant à la partie supérieure de l'abaque, et les charges inductives à la partie inférieure.

Compléter les cadres C59- C60 et C61 du cours

cf. cours et notes associées

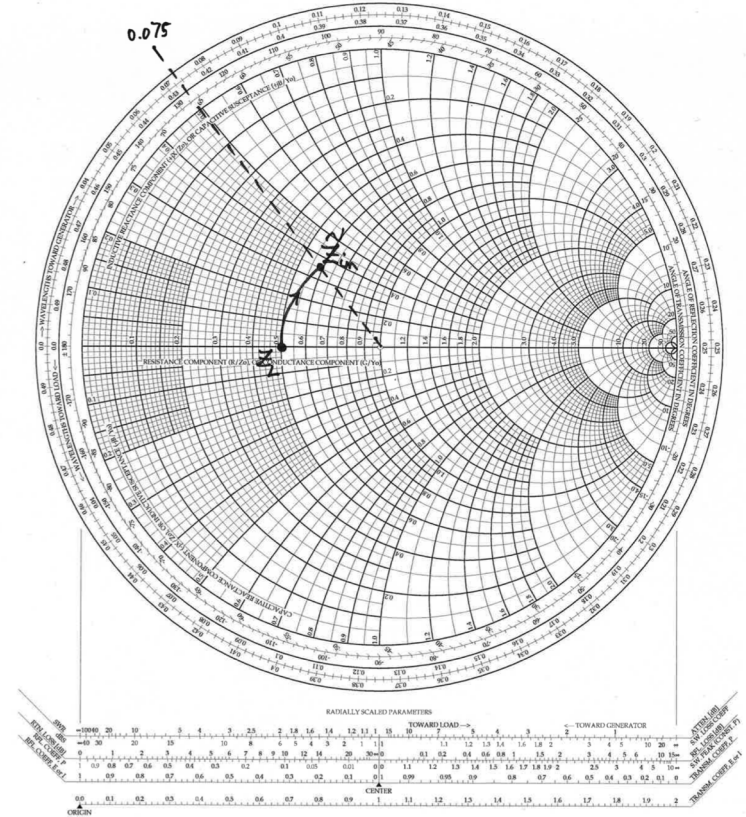
Exemple du cours # 1

$$\tilde{Z}_L = \frac{50 \Omega}{100 \Omega} = 0.5 \quad \frac{l}{\lambda} = \frac{86.25}{150} = 0.575 = 0.5 + 0.075$$

Exemple 1 : Impédance d'entrée avec une charge purement résistive. Trouver l'impédance d'entrée d'une ligne de transmission sans perte d'impédance caractéristique **100Ω** et de longueur **86.25cm** terminée par une charge résistive de **50Ω**. Prendre **$\lambda = 1.5\text{m}$** .

$$\tilde{Z}_{in} = 0.59 + j0.36$$

$$\Rightarrow Z_{in} = Z_0 \tilde{Z}_{in} = 59 + j36\Omega$$



Exemple du cours # 2

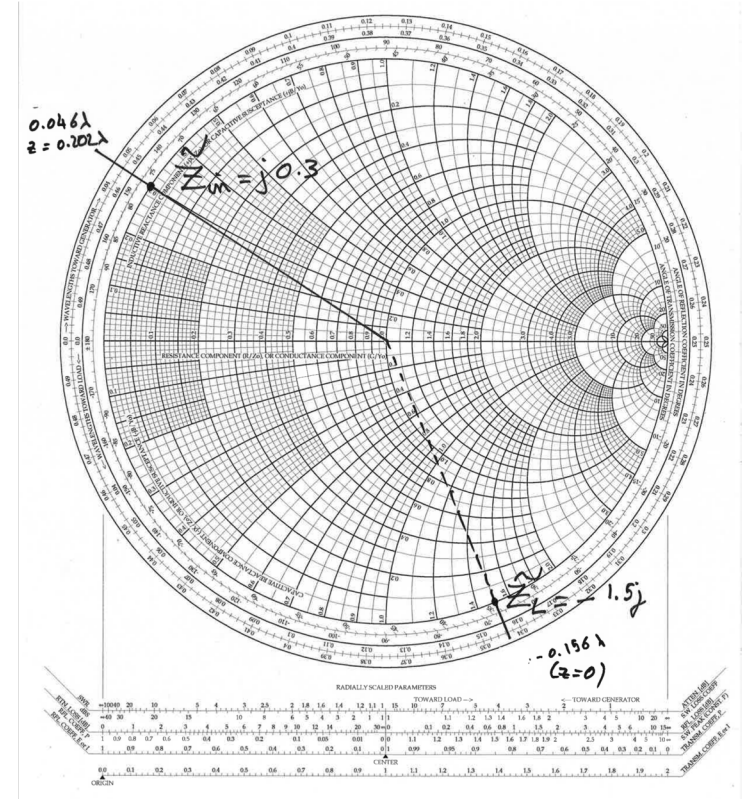
$$\tilde{Z}_L = \frac{-j75 \Omega}{50 \Omega} = -1.5j$$

$$\frac{l}{\lambda} = 1.202 = 1 + 0.202$$

Exemple 2 : Impédance d'entrée avec une charge purement réactive. Trouver l'impédance d'entrée d'une ligne de transmission sans perte d'impédance caractéristique 50Ω et de longueur 1.202λ terminée par une charge $Z_L = 0 - j75\Omega$.

$$\tilde{Z}_{in} = j0.3$$

$$\Rightarrow Z_{in} = Z_0 \tilde{Z}_{in} = j15\Omega$$



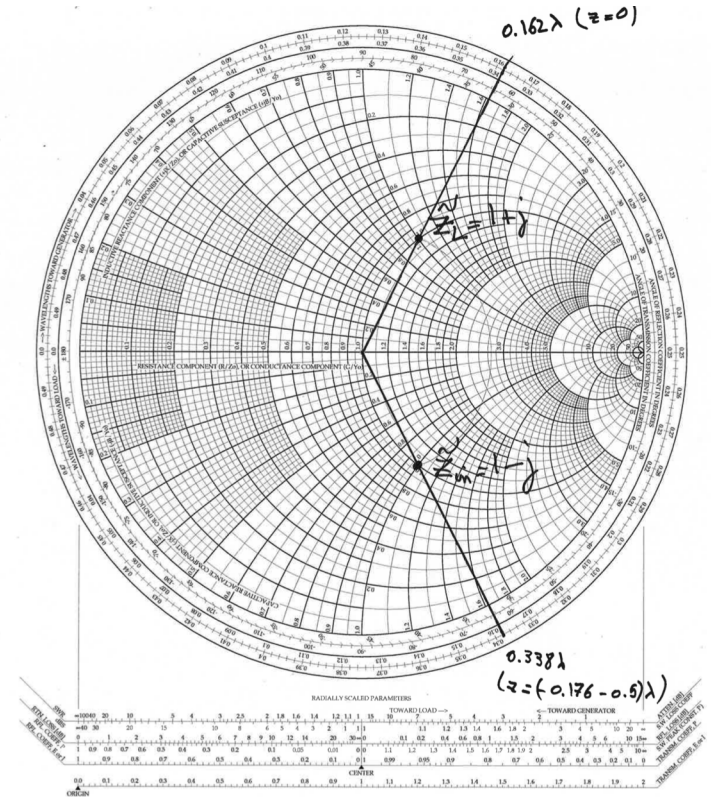
Exemple du cours # 3

$$\tilde{Z}_L = \frac{100 + j100 \Omega}{100 \Omega} = 1 + j \frac{l}{\lambda} = 0.676 = 0.5 + 0.176$$

Exemple 3 : Impédance d'entrée avec une charge complexe. Trouver l'impédance d'entrée d'une ligne de transmission sans perte d'impédance caractéristique 100Ω et de longueur 0.676λ terminée par une charge $Z_L = 100 + j100\Omega$.

$$\tilde{Z}_{in} = 1 - j$$

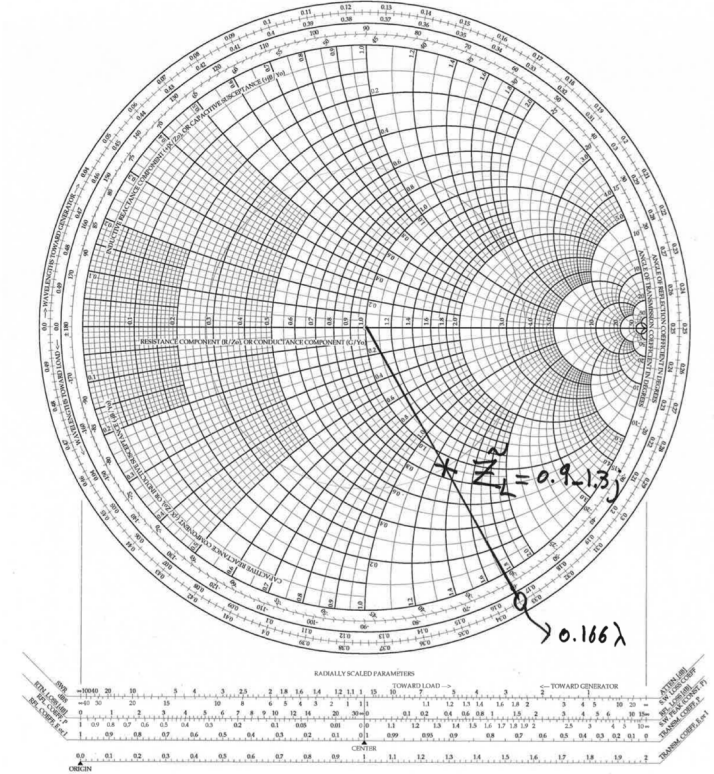
$$\Rightarrow Z_{in} = Z_0 \tilde{Z}_{in} = 100 - j100\Omega$$



Exemple du cours # 4

Exemple 4 : charge inconnue. On mesure sur une ligne un rapport d'onde stationnaire $S = 3.6$ et une distance au premier minimum de tension de $z_{min} = -0.166\lambda$. Trouver la valeur de l'impédance normalisée de la charge.

$$\tilde{Z}_L = 0.9 - 1.3j$$



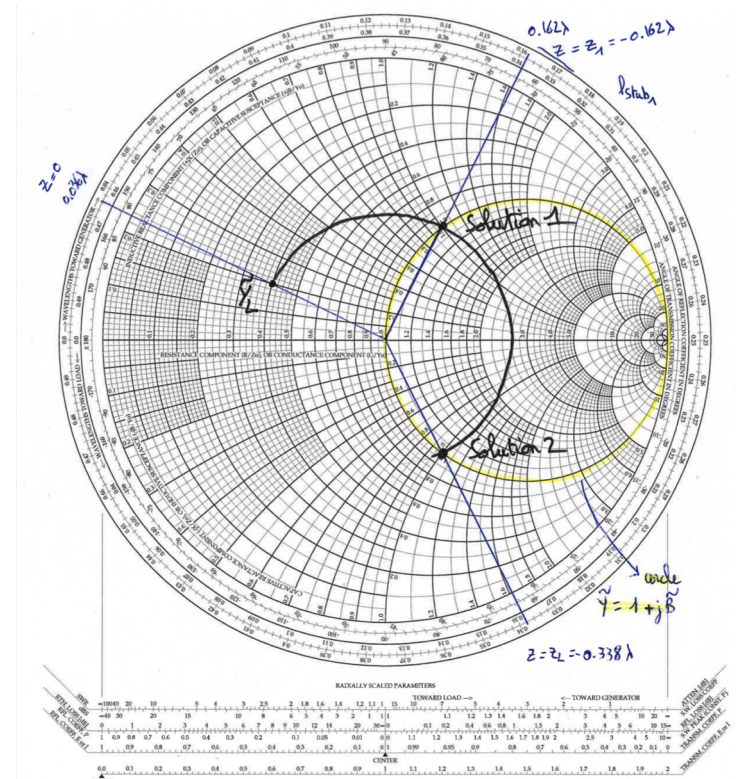
Exemple du cours # 5

$$\tilde{Y}_L = \frac{1/(160 - j80 \, \Omega)}{1/80 \, \Omega} = 0.4 + 0.2j$$

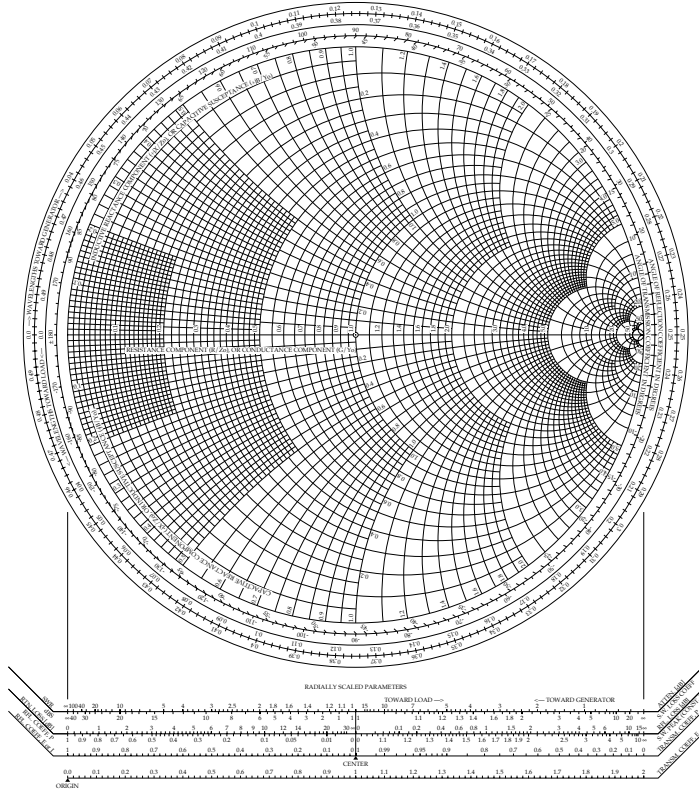
Exemple 5 : Adaptation d'impédance par une ligne parallèle court-circuitée (parallèle stub). Etant donnée une ligne avec $Z_0 = 80\Omega$ et une charge $Z_L = 160 - j80\Omega$, adapter la ligne en trouvant la position et la longueur du stub court-circuité.

Solution 1: $\tilde{Y}_1 = -j$ en $z_1 = -0.126\lambda$
 $l_{stub,1} = 0.125\lambda$

Solution 2: $\tilde{Y}_2 = +j$ en $z_2 = -0.302\lambda$
 $l_{stub,2} = 0.375\lambda$



Conclusion



Deux approches pour résoudre les problèmes:

- 1) Approche numérique: calculs directs
- 2) Approche graphique: Abaque de Smith